НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ-2021

«Утверждаю»
Проректор по образовательной деятельности

_______________ М.А. Соловьев

МАТЕМАТИКА

ВАРИАНТ 0

1. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+16}$ **на отрезке** $|x+5,5|\le 2,5$ **.**

2. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\dfrac{7}{2x}$ **в точке с абсциссой** $x_0=-4$ **.**

3. Решить уравнение $\sqrt{2\cos x-1}=-\sin x$ **.**

4. Решите неравенство $\dfrac{\left(25x-3x^2+18\right)\sqrt{x-1}}{\log_4|x-7|-1}\ge 0$ **.**

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **. Через точки** C, D_1 **и середину ребра** AA_1 **проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно 4.**

6. Найдите все значения параметра a, **при каждом из которых неравенство**

$$\left(a+7+x^2-6x\right)\left(a-5-2^{-x}\right)>0$$

не имеет решений относительно x **.**

Председатель предметной комиссии
по математике, доцент А.Н. Харлова

БИЛЕТ 0

1. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+16}$ **на отрезке** $\left|x+5,5\right|\le 2,5$.

Решение

Решим неравенство $\left|x+5,5\right|\le 2,5$:

$$\left|x+5,5\right|\le 2,5 \Rightarrow \begin{cases} x+5,5\le 2,5 \\ x+5,5\ge -2,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -3 \\ x\ge -8 \end{cases} \Rightarrow [-8;-3].$$

Найдем наибольшее значение функции $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+16}$ **на отрезке** $[-8;-3]$.

Производная функции $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+16}$ **рана**

$$f'(x)=\frac{8(x^2+16)-16x^2}{(x^2+16)^2}=\frac{8\cdot 16-8x^2}{(x^2+16)^2}.$$

Решим уравнение $f'(x)=0$:

$$\frac{8\cdot 16-8x^2}{(x^2+16)^2}=0 \Rightarrow x=\pm 4.$$

$x=4\notin[-8;-3]$

$x=-4\in[-8;-3]$.

Вычислим значение функции на концах отрезка $[-8;-3]$ **и в точке** $x=-4$:

$$f(-8)=\frac{-64}{64+16}=-0,8$$

$$f(-4)=\frac{-32}{32}=-1$$

$$f(-3)=\frac{-24}{25}=-0,96.$$

Таким образом наибольшее значение функции $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+16}$ **на отрезке** $[-8;-3]$ равно -0,8.

Ответ: $-0,8$.

2. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\dfrac{7}{2x}$ **в точке с абсциссой** $x_0=-4$.

Решение

Найдём уравнение касательной к графику функции $y=\frac{7}{2x}$ **в точке с абсциссой** $x_0=-4$ **:**

$$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$$

$$y(-4)=-\frac{7}{8}$$

$$y'(x_0)=\left(-\frac{7}{32}\right)$$

$$x_0=-4$$

Подставим полученные значения в уравнение касательной и получим $y=-\frac{7}{32}x-\frac{14}{8}$ **.**

Найдём точки пересечения прямой с осями координат:

с Oy **:** $\left(0;-\frac{14}{8}\right)$

с Ox **:** $(-8;0)$

Тогда площадь треугольника равна

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{8}\cdot 8=7$$

Ответ: $S=7$ **.**

3. Решить уравнение $\sqrt{2\cos x-1}=-\sin x$ **.**

Решение

$$\begin{cases}-\sin x\ge 0\\ 2\cos x-1\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x\le 0\\ \cos x\ge\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$2\cos x-1=\sin^2 x\Rightarrow$$
$$\cos^2 x+2\cos x-2=0\Rightarrow$$
$$t=\cos x\Rightarrow$$
$$t^2+2t-2=0\Rightarrow$$
$$t=-1-\sqrt{3}<-1,$$
$$t=-1+\sqrt{3}$$

Следовательно

$$\cos x=-1+\sqrt{3}\Rightarrow$$
$$x=\pm\arccos(-1+\sqrt{3})+2\pi n, n\in Z$$

С учётом условий $\begin{cases} \sin x \le 0 \\ \cos x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Окончательно получаем

$x = -\arccos(-1+\sqrt{3}) + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $x = -\arccos(-1+\sqrt{3}) + 2\pi n, n \in Z$ **.**

4. Решите неравенство $\dfrac{\left(25x-3x^2+18\right)\sqrt{x-1}}{\log_4\left|x-7\right|-1} \ge 0$ **.**

Решение

Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ x \ne 7, \\ \log_4\left|x-7\right| \ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ x \ne 7, \\ x \ne 11 \\ x \ne 3 \end{cases}$$

Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left(25x-3x^2+18\right)\sqrt{x-1}\left(\log_4\left|x-7\right|-1\right) \ge 0 \\ \log_4\left|x-7\right|-1 \ne 0 \end{cases}$$

$\left(25x-3x^2+18\right)\sqrt{x-1}\left(\log_4\left|x-7\right|-1\right) = 0 \Rightarrow$

$x = 9$

$x = -\dfrac{2}{3}$

$x = 1$

$x \ne 3$

$x \ne 11$

Нанесём на числовую ось ОДЗ и полученные корни.

В результате получим четыре интервала

$\left[1;3\right),\left(3;7\right),\left(7;9\right],\left[9;11\right),\left(11;+\infty\right)$

Определим знак функции $f(x) = \dfrac{\left(25x-3x^2+18\right)\sqrt{x-1}}{\log_4\left|x-7\right|-1}$ **в каждом из интервалов:**

$x \in [1;3),\ f(x) \ge 0$

$x \in (3;7),\ f(x) < 0$

$x \in (7;9],\ f(x) \le 0$

$x \in [9;11),\ f(x) \ge 0$

$x \in (11;+\infty),\ f(x) < 0$

В итоге решением неравенства является $[1;3) \cup [9;11)$.

Ответ: $x \in [1;3) \cup [9;11)$.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **. Через точки** C, D_1 **и середину ребра** AA_1 **проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно 4.**

Решение

Построим сечение:

- **пусть** E **-середина ребра** AA_1
- **соединим точки лежащие в одной плоскости** C **и** D_1**,** D_1 **и** E
- **через точку** E **в плоскости** AA_1BB_1 **проведём прямую параллельную прямой** D_1C
- **точку пересечения этой прямой с ребром** AB **обозначим через** F
- **соединим точки** F **и** C**.**

Получим сечение $EFCD_1$

Сечением куба будет являться равнобедренная трапеция (необходимо доказать!)

$ED_1 = FC$ **и** $EF \uparrow\uparrow D_1C$**.**

Найдём площадь трапеции.

Из треугольника AEF**:** $EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = \sqrt{8}$**,**

Из треугольника DD_1C_1**:** $D_1C = \sqrt{DD_1^2 + DC^2} = \sqrt{32}$**,**

Из треугольника A_1ED_1**:** $D_1E = \sqrt{A_1E^2 + A_1D_1^2} = \sqrt{20} = FC$**.**

Найдём высоту трапеции :

$$H = \sqrt{20 - \left(\frac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{2}\right)^2} = \sqrt{20 - 2} = \sqrt{18}.$$

Тогда площадь сечения равна

$$S=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{32}}{2}\cdot\sqrt{18}=18.$$

Ответ: $S=18$**.**

6. Найдите все значения параметра a **при каждом из которых неравенство**

$$\left(a+7+x^2-6x\right)\left(a-5-2^{-x}\right)>0$$

не имеет решений относительно x**.**

Решение

Неравенство не имеет решений, если $\left(a+7+x^2-6x\right)\left(a-5-2^{-x}\right)\le 0$**.**

Запишем неравенство в виде $\left(a-g(x)\right)\left(a-f(\mathrm{x})\right)\le 0$**, где** $\mathrm{g}(x)=6x-x^2-7$**,** $\mathrm{f}(x)=2^{-x}+5$**.**

Наибольшее значение квадратичной функции $\mathrm{g}(x)=6x-x^2-7$ **достигается в вершине** $\mathrm{g}(3)=18-9-7=2$ **. Тогда область значений этой функции** $\mathrm{E(g)}=\left(-\infty;2\right]$ **.**

Так как множество значений функции 2^{-x} **это интервал** $\left(0;+\infty\right)$**, то** $\mathrm{E(f)}=\left(5;+\infty\right)$**.**

Неравенство будет иметь решение, если

$$\begin{cases}a-g(x)\ge 0,\\ a-f(\mathrm{x})\le 0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}a-g(x)\le 0,\\ a-f(\mathrm{x})\ge 0\end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases}a\ge g(x),\\ a\le f(\mathrm{x})\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}a\le g(x),\\ a\ge f(\mathrm{x})\end{cases}.$$

Вторая система неравенств решений не имеет.

Для первой системы получаем

$$\begin{cases}a\ge 2,\\ a\le 5\end{cases}.$$

Откуда $a\in\left[2;5\right]$**.**

Ответ: $a\in\left[2;5\right]$**.**